

Table des matières

Introduction	3
1 Généralités sur les ensembles ordonnés et les treillis.	5
1.1 Fonctions caractéristiques :	6
1.2 Relations binaires :	6
1.2.1 Relation d'ordre	7
1.2.2 Structures ordonnées :	8
1.3 Treillis :	10
1.3.1 Filtres et Ideaux dans un treillis :	12
1.3.2 Treillis distributif :	13
1.3.3 Treillis complémenté :	14
1.3.4 Treillis de Boole :	14
1.3.5 Algèbre de Bool	15
1.4 Théorème de représentation de Stone	15
2 Dualité de priestley d'un treillis distributif fermé	18
2.1 Ensemble croissante :	19
2.2 Espace totalement discontinu :	19
2.3 Espace de Priestley :	19
2.4 Etude de la dualité topologique :	20
3 Exemples sur représentation d'un treillis distributif fermé.	25

3.1	Exemples	26
3.1.1	Exemple 1	26
3.1.2	Exemple 2	30
3.1.3	Exemple 3	32

Introduction

En 1937 Stone a donné une dualité *des treillis distributifs fermés* en topologisant X l'ensembles des Idéaux de A (A *treillis distributif fermé*), en prenant $\{I_a : a \in A\}$ l'ensemble de tous les Idéaux de A contenant a comme une base de topologie de l'espace dual de A .

En 1971, *H.A.Priestley* a développé une nouvelle dualité pour *les treillis distributifs fermés* en remplaçant $\{I_a : a \in A\}$ des Idéaux par $\{F_a : a \in A\}$ où F_A est l'ensemble des $0 - 1$ *homomorphisme du treillis* A dans la chaîne $\{0, 1\}$ non identiquement nuls qui prenant 1 en 0.

Le but de ce memoire est d' établir *une représentation des treillis distributifs fermés*.

Ce travail est reparti en trois chapitres :

. Dans le premier chapitre on rappelle des notions relatives aux relations d'ordres et aux ensembles ordonnées, les *treillis*, les filtres et les Idéaux.

. Dans la second chapitre on définit *l'espace de Priestley* et démontre que la catégorie dual de l'espace de *Priestley* est equivalente la catégorie *des treillis distributifs fermés*.

. Dans le dernier chapitre on donne des exemples d'application la représentation *des treillis distributifs fermés* et fini.

Notation

χ_A : *Fonction caractéristique.*

R : *Relation binaire.*

$\leq$: *Relation d'ordre.*

$(X, \leq)$: *Ensemble ordonné.*

A^l : *Ensemble des minirants.*

A^u : *Ensemble des majorants.*

$x \wedge y$: *$\sup\{x, y\}$.*

$x \vee y$: *$\min\{x, y\}$.*

$(X, \leq, \wedge, \vee)$: *Un treillis.*

I : *Ideal.*

F : *filtre.*

U : *Ultrafiltre.*

B : *Algèbre de Boole.*

$T(A) = (X, \tau, \leq) = \sigma$: *L'espace de Priestley.*

$L(\sigma)$: *L'espace dual de l'espace de Priestley.*

Chapitre 1

Généralités sur les ensembles ordonnés et les treillis.

Résumé

On rappelle dans ce chapitre des notions relatives aux relations d'ordres et aux ensembles ordonnés, les treillis, les filtres et les Idéaux.

Contenu

- 1.1 Fonctions caractéristiques.
- 1.2 Relation binaire.
- 1.3 Treillis.
- 1.4 Théorème de représentation de Stone.

1.1 Fonctions caractéristiques :

Définition 1.1

Soit X un ensemble, on définit la fonction caractéristique de A , notée χ_A l'application définie par :

$$\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$$
$$x \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A; \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Propriétés des fonctions caractéristiques : Soient A et B deux parties de E :

- a. $A \subset B \Leftrightarrow \chi_A \leq \chi_B$
- b. $A = B \Leftrightarrow \chi_A = \chi_B$
- c. $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$
- d. $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$
- e. $\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_A \cdot \chi_B$

En particulier, $\chi_{\bar{A}} = 1 - \chi_A$

1.2 Relations binaires :

Définition 1.2[9]

Si A et B sont deux ensembles il ya une propriété spécifique entre x de A et y de B , cette propriété peut représenter par la couple ordonné (x, y) . L'ensemble de tels paires (x, y) , $x \in A$ et $y \in B$ est dit relation R .

$$R = \{(x, y) / x \in A, y \in B\}$$

Ou

$$G_R = \{(x, y) \in A \times B / xRy\}$$

R est une relation binaire est une sous-ensemble de $A \times B$ et on écrit $(x, y) \in R$ ou xRy pour $R \subseteq A \times B$.

Exemple 1.1

$A = \mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{N}$ et $R = \{(0, 0), (-1, 1), (1, 1), (-2, 4), (2, 4), \dots\} = \{(x, x^2), x \in \mathbb{Z}\}$.

Opérations sur les relations binaires :

1- L'union des relations :

$T = R \cup S$, est dit l'union de R et S si $(x, y) \in R$ ou $(x, y) \in S$, alors $(x, y) \in T$.

2- L'intersection des relations :

$T = R \cap S$, est dit l'intersection de R et S si $(x, y) \in R$ et $(x, y) \in S$, alors $(x, y) \in T$.

3- Complément d'une relation :

$A \times B$ représente toutes les relations possibles qui peuvent se trouver entre deux ensembles :

$$R^c = \overline{R} = \{(x, y) \in A \times B / (x, y) \notin R\}.$$

$\overline{R}$ est dit le complément de la relation R .

4- Relation inverse :

Soit R une relation de A à B . Son inverse R^{-1} est définie par :

$$R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A / (x, y) \in R, x \in A, y \in B\}.$$

5- Composition :

Soient R et S deux relations définies sur A et B et C . T est dit la composition de R et S

$$R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C.$$

$$T = S \circ R \subseteq A \times C.$$

$$T = \{(x, z) / x \in A, y \in B, z \in C, (x, y) \in R, (y, z) \in S\}.$$

1.2.1 Relation d'ordre

Définition 1.3[9]

Une relation binaire R sur un ensemble X est un ordre sur X si elle vérifie les trois propriétés suivantes :

1- Réflexivité : Pour tout $x \in X$, xRx .

2- Antisymétrie : Pour tous $x, y \in X$, $(xRy$ et $yRx)$ impliquent $x = y$.

3- Transitivité : Pour tous $x, y, z \in X$, $(xRy$ et $yRz)$ impliquent xRz .

L'ordre R est dit total s'il est tel que : $\forall x, y \in X : (xRy$ ou $yRx)$.

1.2.2 Structures ordonnées :

Définition 1.4

Soit X un ensemble non vide et R une relation d'ordre sur X . Alors le couple (X, R) est appelé un ensemble ordonné. Usuellement R est remplacée par le symbole $\leq$

Ainsi, si X est fini, on peut représenter l'ordre $(X, \leq)$ par un diagramme de Hasse.

Un sous-ensemble Y est une chaîne s'il est totalement ordonné (c'est-à-dire $x \leq y$ ou $y \leq x$, pour tout $x, y \in Y$). Autrement dit x et y sont *comparables*. Dans le cas contraire, l'ordre est partiel, et l'ensemble $(X, \leq)$ est dit ensemble *partiellement ordonné*.

On dira que deux éléments x et y de X sont *incomparables* et on noté par $x \parallel y$ si $x \not\leq y$ et $y \not\leq x$.

Un ensemble composé d'éléments *incomparables* entre eux est appelé un *antichaîne*.

Exemple 1.2

Soit $X = \{a, b, c, d, e\}$ et $P = (X, \leq)$ ensemble ordonné et $\leq$ est l'ordre suivant sur X :

$$\leq = \{(a, b), (a, e), (c, b), (c, d), (c, e), (d, e), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)\}.$$

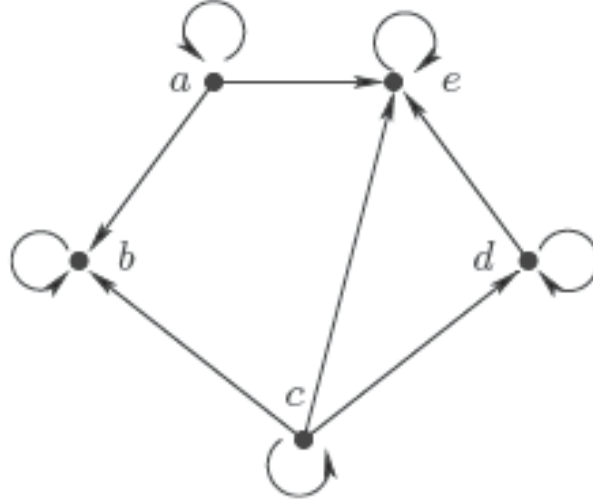
On peut représenter l'ensemble ordonné par un réseau et peut aussi le représenter au moyen de tableau.

Par tableau :

$\leq$	a	b	c	d	e
a	1	1	0	0	1
b	0	1	0	0	0
c	0	1	1	1	1
d	0	0	0	1	1
e	0	0	0	0	1

$\leq$	a	b	c	d	e
a	$\times$	$\times$			$\times$
b		$\times$			
c		$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
d				$\times$	$\times$
e					$\times$

Par réseau :



Fig(1.1)

Eléments particuliers :

Soit $(X, \leq)$ un ensemble ordonné et $A \subseteq X$:

1. On dit que $x \in X$ est *un minorant* de A si $x \leq a, \forall a \in A$ (l'ensemble des minorants de A , noté par A^l).

2. On dit que $x \in X$ est *un majorant* de A si $a \leq x, \forall a \in A$ (l'ensemble des majorants de A , noté par A^U).

3. On dit que $m \in A$ est *le minimum* de A si : $m \leq a, \forall a \in A$.

4. On dit que $M \in A$ est *le maximum* de A si : $a \leq M, \forall a \in A$ noté $\max(A)$.

Remarque 1.1

le $\min(A)$ et le $\max(A)$ s'ils existent sont uniques.

5. $\sup(A) = \min(A^U)$.

6. $\inf(A) = \max(A^l)$.

7. On dit que $x \in A$ est *maximal* de A si : $\exists a \in A$ tel que : $x \leq a \implies x = a$.

8. On dit que $x \in A$ est *minimal* de A si : $\exists a \in A$ tel que : $a \leq x \implies x = a$.

1.3 Treillis :

Un treillis est une classe particuliere d'ensembles ordonnés ou on prend en considération la notion d'infimum et de supremum.

Définition 1.5 (inf-demi-treillis)[9]

Un ensemble ordonné $(X, \leq)$ est un inf-demi-treillis si toute paire d'éléments $\{x, y\} \subseteq X$ admet un infimum (borne inférieure).

Définition 1.6 (sup-demi-treillis)[9]

Un ensemble ordonné $(X, \leq)$ est un sup-demi-treillis si toute paire d'éléments $\{x, y\} \subseteq X$ admet un supremum (borne supérieure).

Notation 1.1

- $\sup \{x, y\} = x \vee y$.
- $\inf \{x, y\} = x \wedge y$.

Définition 1.7 (treillis)[9]

Un ensemble ordonné $(X, \leq)$ est un treillis si toute paire d'éléments $\{x, y\} \subseteq X$ admet un infimum $x \wedge y$ et un supremum $x \vee y$.

Autrement dit, s'il est à la fois inf et sup-demi-treillis, et noté $(X, \leq, \wedge, \vee)$ est un treillis.

Exemple 1.3

1. Toute chaîne est treillis.

$$x, y \in C : \begin{cases} x \vee y = \sup \{x, y\}; \\ x \wedge y = \inf \{x, y\}. \end{cases}$$

2. $E \neq \emptyset$, $(P(E), \subseteq, \wedge, \vee)$ est un treillis

$$\begin{cases} x \wedge y = x \cap y; \\ x \vee y = x \cup y. \end{cases}$$

3. $(D(6), /)$ est un treillis

$$\begin{cases} x \wedge y = \text{pgcd}(x, y) \\ x \vee y = \text{ppmc}(x, y) \end{cases}$$

4. $(\mathbb{N}^*, /)$ est un treillis car l'ensemble $\mathbb{N}^*$ est un ensemble ordonné

$$\begin{cases} x \vee y = ppmc(x, y); \\ x \wedge y = pgcd(x, y). \end{cases}$$

Propriétés : Dans un treillis quelconque :

1. $x \leq y \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \wedge y; \\ y = x \vee y. \end{cases}$
2. $x \wedge x = x \vee x = x$ (idempotence).
3. $x \vee y = y \vee x$ et $x \wedge y = y \wedge x$ (commutativité).
4. $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ (associativité).
5. $\begin{cases} x \wedge (x \vee y) = x \\ x \vee (x \wedge y) = x \end{cases}$ "Loi d'absorption".

Théorème 1.1

Soit T un ensemble muni de deux lois internes $(\wedge, \vee)$ et qui sont :

1. Idempotentes.
2. Commutatives
3. Associatives.
4. Et qui vérifiant les lois d'absorption.

Alors il existe une relation d'ordre et une seule $(\leq)$ sur T tel que :

$$T \text{ soit un treillis avec } \begin{cases} x \wedge y = \inf(x, y); \\ x \vee y = \sup(x, y). \end{cases}$$

Définition 1.8

Un treillis T est fermé s'il possède un plus petit élément (noté 0) et un plus grand élément (noté 1).

Exemple 1.4

$\mathbf{1}-(D(30), /, \wedge, \vee)$ est treillis fermé ($0_{D(30)} = (1), 1_{D(30)} = (30)$) ,avec $D(30)$ l'ensemble des diviseurs de 30.

2- $(\mathbb{N}^*, /, \vee, \wedge)$ est treillis avec $x \wedge y = pgcd(x, y)$ et $x \vee y = ppcm(x, y)$ (n'est pas fermé).

3- $(P(E), \subseteq, \wedge, \vee)$ est treillis fermé ($0_{P(E)} = \emptyset, 1_{P(E)} = E$).

Définition 1.9 ;

Soient E et T deux treillis et f est un application de E dans T , on dit que f est un morphisme de treillis si : $a, b \in E, f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$ et $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$, si de plus f est une bijection alors f est dite isomorphisme.

1.3.1 Filtres et Ideaux dans un treillis :

Définition 1.10 (Filtre et Ideal dans un treillis)

On appelle *filtre* dans un treillis toute partie F de T verifient :

1- $x \in F, y \geq x \Rightarrow y \in F$.

2- $x \in F$ et $y \in F \Rightarrow x \wedge y \in F$.

est un *filtre engendré* par a (*filtre principale*). Un filtre F est dit *propre* si $F \neq T$, et impropre dans le cas contraire.

- Soit 1 le plus grand élément de T alors $\{1\}$, c'est le plus petit filtre de T .

- Soit $a \in T$, l'ensemble $F_{\{a\}} = F_a = \{x \in T / x \geq a\}$.

2) On appelle *Ideal* toute partie non vide de T tel que :

1. $x \in I, y \leq x \Rightarrow y \in I$.

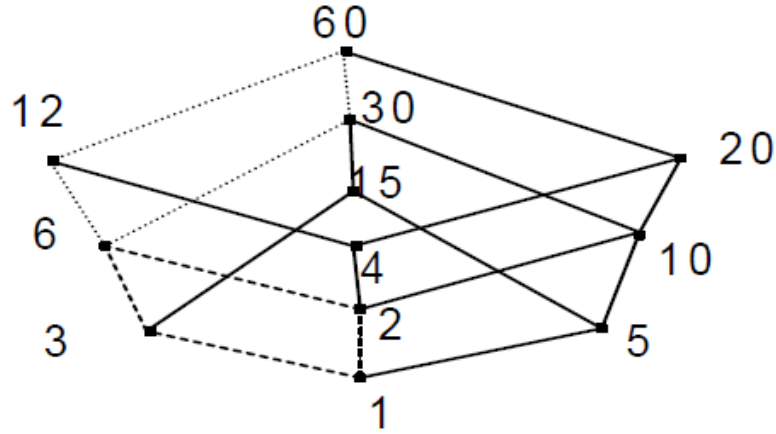
2. $x \in I, y \in I \Rightarrow x \vee y \in I$.

Un Ideal I est *propre* si $I \neq T$.

- $\{0\}$ est le plus petit Ideal de T .

Exemple 1.5

Dans le treillis $D(60)$ le filtre $F = \{6, 12, 30, 60\}$ est principale et l'ideal $I = \{1, 2, 3, 6\}$ est principale($D(60)$ L'ensemble des diviseurs de 60).



Fig(1.2)

Remarque 1.2

1. Un filtre F est propre si et seulement si $0 \notin F$.
2. Un Ideal I est propre si et seulement si $1 \notin I$.

Proposition 1.1

Soit F un filtre propre les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. F est un ultrafiltre.
2. $\forall x \in T, x \notin F \Rightarrow \exists y \in F / x \wedge y = 0$.

Ultrafiltre :

Un ultrafiltre est un filtre propre maximal (respectivement l'Ideal maximal).

1.3.2 Treillis distributif :

Un treillis est dit *distributif* si, chaque loi $(\wedge, \vee)$ est distributive par rapport à l'autre :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z); \\ \quad \quad \quad \text{ou} \\ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z). \end{array} \right.$$

Exemple 1.6

1. $(P(E), \subseteq, \wedge, \vee)$ est un treillis distributif.
2. Toute chaîne est un treillis distributif.

Théorème 1.2

Dans un treillis distributif si,

$$\begin{cases} x \wedge z = y \wedge z \\ x \vee z = y \vee z \end{cases} \Leftrightarrow x = y.$$

1.3.3 Treillis complémenté :

. Soit $x \in T$ le complément de x est un élément x' de T tel que :

$$\begin{cases} x \wedge x' = 0; \\ \text{et} \\ x \vee x' = 1. \end{cases}$$

- . Un treillis est dit complémenté si : chaque élément possède un complément.
- . Dans un treillis distributif, il y a unicité du complément.

1.3.4 Treillis de Boole :

C'est un treillis distributif fermé et complémenté.

propriétés :

1- $\neg 0 = 1.$

2- $\neg \neg x = x.$

3- $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y;$

Et $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y.$

Définition 1.11 (Anneau Booléen)

C'est un anneau unitaire dont la multiplication est idempotente.

Proposition 1.2

Tout treillis de Boole est un anneau Booléen par les lois :

. $x \cdot y = x \wedge y.$

$$\cdot \neg x = x + 1.$$

$$\cdot x \vee y = x + y + xy.$$

*Les lois $\wedge$ et $\vee$ sont commutatives, associatives, et idempotente.

Exemple 1.7

1. $(P(E), \subseteq, \wedge, \vee)$ est un treillis de Boole.
2. La chaîne $U = \{0, 1\}$ est un treillis de Boole.
3. $(\mathbb{N}, /, \wedge, \vee)$ n'est pas treillis de Boole (n'a pas de plus grand élément).
4. $D(6) = \{1, 2, 3, 6\}$ est un treillis de Boole.

1.3.5 Algèbre de Boole

Une algèbre de Boole possédant deux opérations $\vee$ et $\wedge$ qui sont commutatives, associatives et idempotentes et vérifiant la loi d'absorption ; forme un treillis.

Ces opérations étant distributives et chaque élément possédant un complément, il en résulte que toute algèbre de Boole est un treillis de Boole.

Exemple 1.8

E ensemble quelconque, il est équivalent de définir :

- Une structure de treillis de Boole $(E, \leq, \wedge, \vee, 0, 1)$.
- Une structure d'anneau Booléen $(E, +, \cdot, 0, 1)$.

$$x \leq y \iff \begin{cases} x \wedge y = x. \\ x \vee y = y. \end{cases}$$

1.4 Théorème de représentation de Stone

Toute algèbre Booléenne B est isomorphe à sous algèbre Booléenne de la forme $P(X)$.

Preuve :

Soit X l'ensemble des ultrafiltres de B :

$$\sigma : B \rightarrow P(X).$$

$$\begin{aligned}
\sigma(x) &= \{u \in X / x \in u\} \in P(X). \\
\sigma(x \vee y) &= \{u \in X / x \vee y \in u\}. \\
&= \{u \in X / x \in u \text{ ou } y \in u\}. \\
&= \{u \in X / x \in u\} \cup \{u \in X / y \in u\}. \\
&= \sigma(x) \cup \sigma(y).
\end{aligned}$$

Et aussi $\sigma(x \wedge y) = \sigma(x) \cap \sigma(y)$.

$$\begin{aligned}
\sigma(\neg x) &= \{u \in X / \neg x \in u\}. \\
&= \{u \in X / x \notin u\}. \\
&= C \{u \in X / x \in u\}. \\
&= C\sigma(x).
\end{aligned}$$

$$\sigma \text{ injective} \iff \ker \sigma = \emptyset.$$

$$\ker \sigma = \{x \in B / \sigma(x) = \emptyset\}.$$

$$x \in \ker \sigma \iff \sigma(x) = \emptyset.$$

$$\iff x \notin u, \forall u \in X.$$

$$\iff Cx \in u.$$

$$\iff Cx \in \cap u.$$

$$\iff Cx = 1.$$

$$\iff x = 0.$$

Termonologie :

σ est monomorphisme de Stone, X est l'espace de Stone ou l'espace dual de B .

Théorème 1.3

Si B est fini alors σ est surjectif.

Preuve :

$$\sigma : B \longrightarrow P(X) \text{ où } \sigma(x) = \{U \subset X; x \in U\},$$

Si F un filtre de B alors F est principale ($F = \uparrow a$) car F est fini, $F = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$.

Soit $a = a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_k$, on a, $a \in F$ donc $F = B \vee a = \{y \in B : y = x \vee a, x \in B\}$.

Soit $Y \in P(X)$.

Ou bien $Y = \emptyset$, donc $Y = \sigma(0)$.

Ou bien $Y = X$, donc $Y = \sigma(1)$.

Ou bien $\phi \neq Y$ c'est-à-dire $Y \subsetneq X$, donc $Y = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_k\}$ tel que $0 < k < n$, $F = \bigcap_{i=1}^k u_i$ alors F est principale, $F = B \vee a$ tel que $a = \min F$.

On démontre que $Y = \sigma(a)$?

Soit $v \in \sigma(a) \implies a \in v$.

$$\implies F \subset v.$$

$$\implies \bigcap_{i=1}^k u_i \subset v.$$

Supposons que $v \neq u_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, k \implies \forall i, \exists x_i \in u_i \text{ et } x_i \notin v$.

Soit $x = x_1 \vee \dots \vee x_k$, alors $x > x_i ; \forall i = 1, \dots, k \implies x \in \bigcap_{i=1}^k u_i = F$.

$$\implies x \in F.$$

$$\implies x \in v$$

Mais $x = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_k \in v$, donc $\exists i / x_i \in v$ (v est un ultrafiltre), contradiction.

$$\implies v \in Y.$$

$$\implies \sigma(a) \subset Y \quad \text{Alors } \sigma(a) = Y.$$

Donc, σ est surjectif.

Conséquences :

1- Le nombre d'éléments d'une algèbre de Boole est la forme 2^n .

$$B \simeq P(X) = 2^X.$$

$$|B| = 2^{|X|}.$$

Ou n est le nombre d'ultrafiltres de B .

Exemple 1.9

$D(30)$ l'ensemble des diviseurs de 30 à 4 éléments donc 2 ultrafiltres ($4 = 2^2$) (

Chapitre 2

Dualité de Priestley d'un treillis distributif fermé

Résumé

Dans ce chapitre nous étudions les espaces de Priestley et leurs dualité et on démontre que la catégorie des espaces de Priestley est équivalente à la catégorie duale des treillis distributifs fermés.

Contenu

2.1 Ensemble croissante.

2.2 Espace totalement discontinu.

2.3 Espace de Priestley.

2.4 Etude de la dualité topologique.

2.1 Ensemble croissante :

Définition 2.1

Soit $(X, \leq)$ un ensemble ordonné, et soit E un sous ensemble de X . On dit que E est croissant si, $\forall x \in E$, on a : $x \leq y \implies y \in E$.

On dit que est décroissant si, $\forall x \in E$, on a : $y \leq x \implies y \in E$.

Définition 2.2

Un espace ordonné est un triplet $(X, \tau, \leq)$ où X est un ensemble non vide, τ une topologie sur X , $\leq$ une relation d'ordre sur X .

2.2 Espace totalement discontinu :

Définition 2.3

Soit $(X, \tau, \leq)$ un espace ordonné, on dit que $(X, \tau, \leq)$ est un *espace totalement discontinu* si : $\forall x, y \in X$ tel que $x \not\leq y$, il existe un τ -of croissant U et un τ -of décroissant V tel que : $x \in U$, $y \in V$ avec $U \cap V = \emptyset$.

2.3 Espace de Priestley :

Définition 2.4[6]

Un espace ordonné $(X, \tau, \leq)$ est dit *espace de Priestley* s'il est compact et totalement discontinu.

- Soit A un treillis distributif fermé, alors son espace dual sera défini par $T(A) = (X, \tau, \leq)$, où X est l'ensemble des homomorphismes de A sur $\{0, 1\}$, τ est la topologie produit induite par celle de $\{0, 1\}^A$, et $\leq$ est la relation d'ordre : $f \leq g$ si et seulement si $f(a) \leq g(a)$ pour tout $a \in A$.

- Si $\sigma = (X, \tau, \leq)$ est un *espace de Priestley*, alors son espace dual est défini par :

$L(\sigma) = \{Y \nearrow Y \subseteq X \text{ et } Y \text{ est un } \tau\text{-of croissant}\}$ est un treillis distributif par rapport à l'union et à l'intersection des sous ensembles dans X .

2.4 Etude de la dualité topologique :

Soit X un espace topologique compact.

Lemme 2.1[7]

Il ya équivalence entre :

- a) Pour tout $x \in X$ l'intersection des ofs contenant x est $\{x\}$.
- b) Si $x \neq y$, il existe un of V tel que : $x \in V$ et $y \notin V$.
- c) La topologie de X est engendré par les ofs (les ouverts de X sont reunion d'ofs).
- d) X est totalement discontinue.

On appelle espace Booléen tout espace topologique compact, vérifiant l'une des trois propriétés des lemme.

Théorème 2.1[6]

- a) Si A est un treillis distributif alors $T(A) = (X, \tau, \leq)$ est un aspace de priestley.
- b) Si $\sigma = (X, \tau, \leq)$ est un espace de priestley alors $L(\sigma)$ est un treillis distributif fermé.

Preuve :

- (a) Montrons que $T(A)$ est compact :

X étant l'ensemble de tous les homomorphismes de treillis de A sur $\{0, 1\}$, X est fermé dans la topologie induite par la topologie produit de $\{0, 1\}^A$ qui est compacte, donc X est bien compact.

Il reste à montrer que $T(A)$ est totalement discontinu.

Pour cela soient $f, g \in X$ tel que $g \not\leq f$ donc il existe au moins un $a \in A$ tel que $f(a) = 0$ et $g(a) = 1$.

L'ensemble $U = \{h \in X / h(a) = 1\}$ est un τ -of croissant contenant g et $X - U$ est un τ -of décroissant contenant f et $U \cap (X - U) = \emptyset$.

On voit donc que $T(A)$ est un espace de Priestley.

- (b) La démonstration est directe.

Théorème 2.2[2]

- (a) Soit A un treillis distributif. L'application $F_A : A \longrightarrow L(T(A))$ définie par :

$F_A(a) = \{f \in X \mid f(a) = 1\}$ est un isomorphisme de treillis.

(b) Si $\sigma = (X, \tau, \leq)$ est un espace de *Priestley* alors l'application $G_\sigma : \sigma \longrightarrow T(L(\sigma))$ définie par :

$$G_\sigma(x)(Y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in Y; \\ 0 & \text{si } x \notin Y. \end{cases}$$

Pour tout $Y \in L(\sigma)$, est un isomorphisme d'espaces de *Priestley*.

(c) Si $f : A_1 \longrightarrow A_2$ est un homomorphisme de treillis alors l'application $T(f) : T(A_2) \longrightarrow T(A_1)$ définie par : $T(f)(g) = g \circ f$ est un homomorphisme d'espace de *Priestley* (c'est-à-dire une application continue et croissante).

(d) Si $h : X_1 \longrightarrow X_2$ est un homomorphisme d'espace de *Priestley* alors l'application $L(h) : L(X_2) \longrightarrow L(X_1)$ définie par :

$$L(h)(Y) = h^{-1}(Y) \text{ pour tout } Y \in L(X_2)$$

est un homomorphisme de treillis.

(e) Si de plus f et h sont définis comme dans (c) et (d) alors les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ A_1 & \longrightarrow & A_2 \\ F_{A_1} \downarrow & & \downarrow F_{A_2} \\ L(T(A_1)) & \longrightarrow & L(T(A_2)) \\ & L(T(f)) & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & h & \\ \sigma_1 & \longrightarrow & \sigma_2 \\ G_{\sigma_1} \downarrow & & \downarrow G_{\sigma_2} \\ T(L(\sigma_1)) & \longrightarrow & T(L(\sigma_2)) \\ & T(L(h)) & \end{array}$$

Sont commutatifs.

Preuve :

(b) Soit $Y \in L(T(A))$ i.e. *un τ -of croissant*. Existe-t-il un $a \in A$ tel que $F_A(a) = Y$?

Il revient au même de dire que U est *un τ -of croissant* si et seulement si $U = F_A(a)$, $a \in A$.

Pour cela posons $\mathfrak{R} = \{F_A(a) \mid a \in A\}$, $\mathcal{F} = \{X - F_A(a) \mid a \in A\}$.

Ces deux familles sont stables pour la réunion et l'intersection finies.

Soit U un τ -of croissant dans X , Montrons que $U \in \mathfrak{R}$.

Si $f \in U$ et $g \in X - U$ alors $f \not\leq g$; il s'ensuit qu'il existe deux ensembles disjoints $R(f, g)$ et $S(f, g)$ tel que $R(f, g) \in \mathfrak{R}$, $S(f, g) \in \mathcal{F}$ et $f \in R(f, g)$, $g \in S(f, g)$.

La compacité de l'ensemble $X - U$, nous permet de l'exprimer comme une union finie d'ensembles $S(f, g_i)$, $g_i \in X - U$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Posons $R(f) = \bigcup_{0 \leq i \leq m} R(f, g_i)$.

On a $U = \bigcup_{f \in U} R(f)$.

Mais U est compact donc U est une réunion finie d'éléments de $\mathfrak{R}$ i.e. $U = F_A(a)$.

. Il reste à montrer que G_σ est surjective.

Soit $f \in T(L(\sigma))$ et cherchons un $x \in X$ tel que $G_\sigma(x) = f$ où encore tel que pour tel que pour tout $Y \in L(\sigma)$, $G_\sigma(x)(Y) = f(Y)$, i.e. $x \in X \iff f(Y) = 1$.

Posons $H = \{Y \in L(\sigma) / f(Y) = 1\}$ et $A = \bigcap_{Y \in H} Y$, $\dot{H} = \{Z \in L(\sigma) / f(Z) = 0\}$ et $B = \bigcup_{Z \in \dot{H}} Z$. notons que H et $\dot{H}$ sont stables pour la réunion et l'intersection finies.

On a $A - B \neq \phi$, car si $A - B = \phi$ alors :

$$\bigcap_{Y \in H} Y - \bigcup_{Z \in \dot{H}} Z = \phi = \bigcap_{Y \in H} \cap C \bigcup_{Z \in \dot{H}} Y = \bigcap_{Y \in H} \cap \bigcap_{Z \in \dot{H}} CZ = \phi.$$

La compacité de X implique qu'il existe un nombre fini de $Y_i \in H$, $i = 1, \dots, n$, $Z_j \in \dot{H}$, $j = 1, \dots, m$. tel que $\bigcap_{i=1}^n Y_i \cap \bigcap_{j=1}^m CZ_j = \phi$, soit encore $\bigcap_{i=1}^n Y_i - \bigcup_{j=1}^m Z_j = \phi$, donc $\bigcap_{i=1}^n Y_i \subset \bigcup_{j=1}^m Z_j$, c-à-d, $f(\bigcup_{j=1}^m Z_j) = 1$, ce qui est absurde, car $f(\bigcup_{j=1}^m Z_j) = \bigvee_{j=1}^m f(Z_j) = 0$.

On choisit donc un $x \in A - B$, il répond bien à la question.

(e) Supposons que f et h sont comme dans (c) et (d). Montrons que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ A_1 & \longrightarrow & A_2 \\ F_{A_1} \downarrow & & \downarrow F_{A_2} \\ L(T(A_1)) & \longrightarrow & L(T(A_2)) \\ & L(T(f)) & \end{array}$$

est commutatif :

$$\begin{aligned}
(L(T(f)) \circ F_{A_1})(a) &= L(T(f))(F_{A_1}(a)) = T^{-1}(f)(F_{A_1}(a)) \\
&= \{g \in T(A_2) \mid T(f)(g) \in F_{A_1}(a)\} \\
&= \{g \in T(A_2) \mid g \circ f \in F_{A_1}\} \\
&= \{g \in T(A_2) \mid (g \circ f)(a) = 1\} \\
&= \{g \in T(A_2) \mid g(f(a)) = 1\} \\
&= F_{A_2}(f(a)) \\
&= (F_{A_2} \circ f)(a) \text{ ceci pour tout } a \in A_1.
\end{aligned}$$

D'où $L(T(f)) \circ F_{A_1} = F_{A_2} \circ f$. Donc le diagramme précédent est commutatif.
Montrons maintenant que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
& & h \\
\sigma_1 & \longrightarrow & \sigma_2 \\
G_{\sigma_1} \downarrow & & \downarrow G_{\sigma_2} \\
T(L(\sigma_1)) & \longrightarrow & T(L(\sigma_2)) \\
& & T(L(h))
\end{array}$$

est commutatif.

$$\begin{aligned}
(T(L(h)) \circ G_{\sigma_1})(x) &= T(L(h))(G_{\sigma_1}(x)) \\
&= G_{\sigma_1}(x) \circ L(h).
\end{aligned}$$

Or

$$G_{\sigma_1}(x) \circ L(h)(Y) = G_{\sigma_1}(x)(h^{-1}(Y))$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } x \in h^{-1}(Y); \\ 0 & \text{si } x \notin h^{-1}(Y). \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} 1 & \text{si } h(x) \in Y; \\ 0 & \text{si } h(x) \notin Y. \end{cases} \\
&= G_{\sigma_2}(h(x)) \\
&= (G_{\sigma_2} \circ h)(x).
\end{aligned}$$

Le diagramme précédent est donc commutatif.

Résultat :

Ce théorème montre que la catégorie des espaces de Priestley est équivalente à la catégorie duale des treillis distributifs fermés.

Chapitre 3

Exemples sur représentation d'un treillis distributif fermé.

Resumé :

On rappelons dans ce chapitre trois exemples pour étudié la représentation des treillis distributifs fermés et démontre la résultat dernière dans la deuxieme chapitre.

Contenu :

3.1 Exemples.

3.1.1 Exemple 1.

3.1.2 Exemple 2.

3.1.3 Exemple 3.

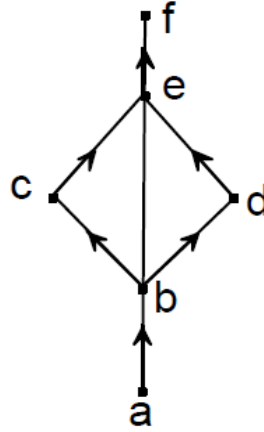
3.1 Exemples

3.1.1 Exemple 1

Soit $(A, \vee, \wedge, R)$ un treillis distributif fermé tel que :

$A = (a, b, c, d, e, f)$ et R relation définie par :

R	a	b	c	d	e	f
a	1	1	1	1	1	1
b	0	1	1	1	1	1
c	0	0	1	0	1	1
d	0	0	0	1	1	1
e	0	0	0	0	1	1
f	0	0	0	0	0	1



Fig(3.1)

$T(A) = \{0 - 1 \text{ homomorphismes de } A \text{ dans } \{0, 1\}\}.$

à titre d'exemple on détermine les $0 - 1$ homomorphismes de treillis i.e $T(A)$:

par définition on a :

$f(f) = 1$ et $f(a) = 0$ ($0 - 1$ homomorphisme)

Premier cas :

$$\begin{aligned}
\text{Si } f_1(e) = 0 \text{ alors } f_1(c \vee d) &= f_1(e) \\
&= f_1(c) \vee f_1(d) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\implies f_1(c) = f_1(d) = 0.$$

$$\begin{aligned}
\implies f_1(c \wedge d) &= f_1(c) \wedge f_1(d) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\implies f_1(b) = 0.$$

Où

$$\begin{array}{ccc}
& f_1(f) = 1 & \\
& \uparrow & \\
& f_1(e) = 0 & \\
\nearrow & & \nwarrow \\
f_1(c) = 0 & & f_1(d) = 0 \\
\nwarrow & & \nearrow \\
& f_1(b) = 0 & \\
& \uparrow & \\
& f_1(a) = 0 &
\end{array}$$

Deuxième cas :

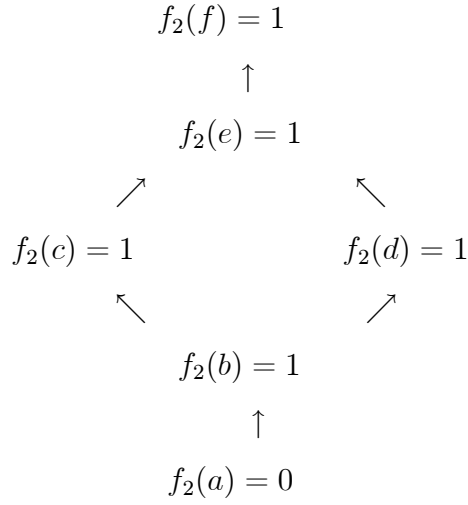
$$\begin{aligned}
\text{Si } f_2(e) = 1 &\implies f_2(c \vee d) = 1. \\
&\implies f_2(c) \vee f_2(d) = 1.
\end{aligned}$$

$$\text{Si } f_2(c) = 1 \text{ et } f_2(d) = 1.$$

$$\implies f_2(c \wedge d) = f_2(c) \wedge f_2(d) = 1.$$

$$\implies f_2(b) = 1.$$

D'ou



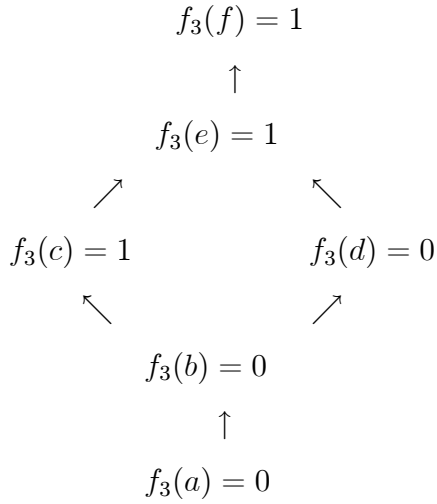
Troisième cas :

Si $f_3(e) = 1$ et $f_3(c) = 1$ et $f_3(d) = 0$.

$$\implies f_3(c \wedge d) = f_3(c) \wedge f_3(d) = 0.$$

$$\implies f_3(b) = 0.$$

D'ou



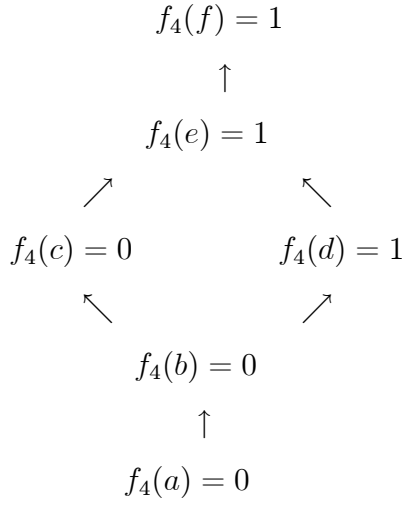
Quatrième cas :

Si $f_4(e) = 1$ et $f_4(c) = 0$ et $f_4(d) = 1$.

$$\implies f_4(c \wedge d) = f_4(c) \wedge f_4(d) = 0.$$

$$\implies f_4(b) = 0.$$

D'ou



$T(A) = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, tel que :

A	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
a	0	0	0	0
b	0	0	0	1
c	0	1	0	1
d	0	0	1	1
e	0	1	1	1
f	1	1	1	1

$$L(T(A)) = \{\phi, \{f_4\}, \{f_2, f_4\}, \{f_3, f_4\}, \{f_2, f_3, f_4\}, X\}.$$

R_2	ϕ	$\{f_4\}$	$\{f_2, f_4\}$	$\{f_3, f_4\}$	$\{f_2, f_3, f_4\}$	X
ϕ	1	1	1	1	1	1
$\{f_4\}$	0	1	1	1	1	1
$\{f_2, f_4\}$	0	0	1	0	1	1
$\{f_3, f_4\}$	0	0	0	1	1	1
$\{f_2, f_3, f_4\}$	0	0	0	0	1	1
X	0	0	0	0	0	1

Finalement :

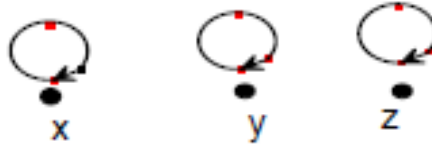
$F_A : A \longrightarrow L(T(A))$ définie par :

A	$F_A(a_i)_{i=1.....6}$
a	ϕ
b	$\{f_4\}$
c	$\{f_2, f_4\}$
d	$\{f_3, f_4\}$
e	$\{f_2, f_3, f_4\}$
f	X

3.1.2 Exemple 2

Soit (X, τ, r) un espace de Priestley avec $X = \{x, y, z\}$ et r définie par :

r	x	y	z
x	1	0	0
y	0	1	0
z	0	0	1



Fig(3.2)

Donc : $L(X) = \{\phi, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, X\}$.

Et r_1 défini par :

$$r_1(A, B) = \begin{cases} 1 & \text{si } A = B. \\ 1 - \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(B)} & \text{si } A \subset B. \\ 0 & \text{dans les autres.} \end{cases}$$

Donc r_1 donnée par la matrice :

r_1	ϕ	$\{x\}$	$\{y\}$	$\{z\}$	$\{x, y\}$	$\{x, z\}$	$\{y, z\}$	X
ϕ	1	1	1	1	1	1	1	1
$\{x\}$	0	1	0	0	1	1	0	1
$\{y\}$	0	0	1	0	1	0	1	1
$\{z\}$	0	0	0	1	0	1	1	1
$\{x, y\}$	0	0	0	0	1	0	0	1
$\{x, z\}$	0	0	0	0	0	1	0	1
$\{y, z\}$	0	0	0	0	0	0	1	1
X	0	0	0	0	0	0	0	1

Et $T(L(X)) = \{0 - 1 \text{ homomorphismes de } L(X) \text{ dans } \{0, 1\}\}$,

Pour calculer les 0 - 1 homomorphismes on utilise la m

$$T(L(X)) = \{f_1, f_2, f_3\}$$

$L(X)$	$f_1(X_i)$	$f_2(X_i)$	$f_3(X_i)$
ϕ	0	0	0
$\{x\}$	1	0	0
$\{y\}$	0	1	0
$\{z\}$	0	0	1
$\{x, y\}$	1	1	0
$\{x, z\}$	1	0	1
$\{y, z\}$	0	1	1
X	1	1	1

Et r_2 donnée par :

r_2	f_1	f_2	f_3
f_1	1	0	0
f_2	0	1	0
f_3	0	0	1

Et l'isomorphisme G_x défini par :

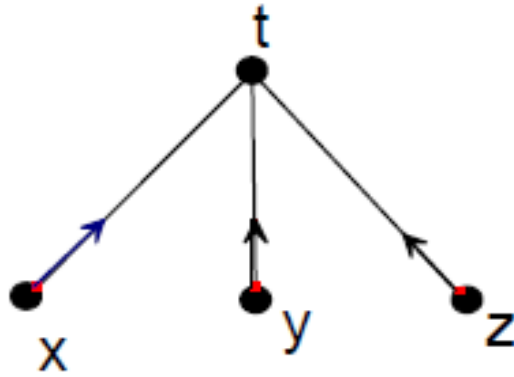
$G_x : X \longrightarrow T(L(X))$ et donné par :

X	$G_x(X_i), X_i \in X$
x	f_1
y	f_2
z	f_3

3.1.3 Exemple 3

Soit (X, τ, r) un espace de Priestley tel que $X = \{x, y, z, t\}$ et r donnée par :

r	x	y	z	t
x	1	0	0	1
y	0	1	0	1
z	0	0	1	1
t	0	0	0	1



Fig(3.3)

Et $L(X) = \{\phi, \{t\}, \{x, t\}, \{y, t\}, \{z, t\}, \{x, y, t\}, \{x, z, t\}, X\}$ et r_1 donnée par :

r_1	ϕ	$\{t\}$	$\{x, t\}$	$\{y, t\}$	$\{z, t\}$	$\{x, y, t\}$	$\{x, z, t\}$	$\{y, z, t\}$	X
ϕ	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\{t\}$	0	1	1	1	1	1	1	1	1
$\{x, t\}$	0	0	1	0	0	1	1	1	1
$\{y, t\}$	0	0	0	1	0	1	0	1	1
$\{z, t\}$	0	0	0	0	1	0	1	1	1
$\{x, y, t\}$	0	0	0	0	0	1	0	0	1
$\{x, z, t\}$	0	0	0	0	0	0	1	0	1
$\{y, z, t\}$	0	0	0	0	0	0	0	1	1
X	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Et $T(L(X)) = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ où

$L(X)$	$f_1(X_i)$	$f_2(X_i)$	$f_3(X_i)$	$f_4(X_i)$
ϕ	0	0	0	0
$\{t\}$	0	0	0	1
$\{x, t\}$	1	0	0	1
$\{y, t\}$	0	1	0	1
$\{z, t\}$	0	0	1	1
$\{x, y, t\}$	1	1	0	1
$\{x, z, t\}$	1	0	1	1
$\{y, z, t\}$	0	1	1	1
X	1	1	1	1

Et l'isomorphisme G_X défini par :

$G_X : X \longrightarrow T(L(X))$ donné par :

X	$G_x(X_i), X_i \in X$
x	f_1
y	f_2
z	f_3
t	f_4

Bibliographie

- [1] A.AMROUNE,B.DAWAZ,*Fuzzy ordered sets and duality for finite Fuzzy distributives lattices*,Soumis.
- [2] A.FULPIOU,*Representation of Lukasiewics algebras by means of ordered Stone spaces*,Discrete Mathematics 30(1980) 111-116.
- [3] B.A.DAVEY,H.A.PRIESTLEY,*Introduction to lattice and ordered*, CAMBRIDGE University press New York (1990-2002).
- [4] G.BIRKHOFF,*Lattice theory*,American mathématiquecal society(1948).
- [5] G.GRÄTZER,*Lattice théorie :Foundation*,Departement of mathematics university of Manitobda R3T2N2 Canada (2011).
- [6] H.A.PRIESTLEY,*Ordered set and dualite for distributive lattices*,Ann.Discrete Math 23(1984) 39-60.
- [7] H.A.PRIESTLEY,*Representation of distributive lattice by Means of ordered Stone space*, Bull London Math soc 2(1970) 186-190.
- [8] L.A.SKONJAKOV,*Eléments of lattice theory*,Hindustan publishing corporation printing press (India) Delhi-110007 (1977).
- [9] N.CASPARD,B.LECLERC,B.MONJARDET,*Ensembles ordonnés finis : concepts,résultats,et usages*,Matématics subject classification (2000).
- [10] R.PADMANABHAN,S.RUDEANU,*Axioms for Lattices and Boolean Algebras*,world scientific publishing co.Pte.Ltd(2008).
- [11] S.ROMAN,*Lattice and ordered sets*,Irvine.CA 92603 USA(2008).

- [12] V.BOICESCU,A.FILIPOIU,S.RUDEANU,*Lukasiewicz-MoizilAlgerbras*,Elsevier science publishers B.V(1991).